Домашно №2, Задача 3 по Алгебра 2 на Компютърни Науки

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Май 2023

Решение (i)

$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + \sqrt{5}b\,i \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ За произволни $A = (a + \sqrt{5}b\,i), B = (c + \sqrt{5}d\,i) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

$A \pm B = (a + \sqrt{5}b\,i) \pm (c + \sqrt{5}d\,i) = (a \pm c) + \sqrt{5}(b \pm d)\,i \in \mathbb{C}$

$A.B = (a + \sqrt{5}b\,i)(c + \sqrt{5}d\,i) = ac + a\sqrt{5}d\,i + c\sqrt{5}b\,i + \sqrt{5}b\,i.\sqrt{5}d\,i = (ac - 5bd) + \sqrt{5}(ad + cb)\,i \in \mathbb{C}$

$\implies \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \leq \mathbb{C}$

Решение (ii)

Избираме произволно $\alpha = (a + \sqrt{5}b\,i) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ $|\alpha|^2 = \left|\sqrt{a^2 + \left(\sqrt{5}b\right)^2}\right|^2 = \sqrt{a^2 + 5b^2}^2 = a^2 + 5b^2$

$a, b \in \mathbb{Z} \implies a^2, b^2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \implies a^2 + 5b^2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$

Решение (iii)

($\Rightarrow$) Нека фиксираме произволно $\alpha = (a + \sqrt{5}b\,i) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^*$. Тогава съществува $\alpha' = (a' + \sqrt{5}b'\,i) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, такова че:

$1 + 0\,i = 1 = \alpha\alpha' = (a + \sqrt{5}b\,i)(a' + \sqrt{5}b'\,i) = (aa' - 5bb') + \sqrt{5}(ab' + ba')\,i$

$$\left|\begin{array}{ll} aa' - 5bb' & = 1 \\ \sqrt{5}(ab' + ba') & = 0 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{lll} aa' - 5\left(\frac{-ba'}{a}\right) & = & 1 \\ b' & = & \frac{-ba'}{a} \end{array}\right| \quad \text{Б.О.О. } a \neq 0$$

$\Rightarrow aa' + 5b^2\frac{a'}{a} = 1 \quad a' = \frac{1}{a + \frac{5b^2}{a}} \quad a' = \frac{a}{a^2 + 5b^2} \Rightarrow b' = \frac{-ba}{a(a^2 + 5b^2)} = -\frac{b}{a^2 + 5b^2}$

Искаме: $a', b' \in \mathbb{Z},$ тоест $(a^2 + 5b^2)||a|$ и $(a^2 + 5b^2)||b|,$ но $(a^2 + 5b^2) \neq 0$ по теорема за делимост

Нека да разглеждаме случая $b \neq 0,$ тогава $(a^2 + 5b^2) \leq |a|$ и $(a^2 + 5b^2) \leq |b|$ обаче в същото време $(a^2 + 5b^2) \geq |a|$ и $(a^2 + 5b^2) \geq |b| \implies |b| = (a^2 + 5b^2) = |a|,$ обаче $|a| = |b| \Rightarrow a^2 + 5a^2 = |a| \Rightarrow a = 0$ ↯

Тоест, $b = 0$ и запазваме $a^2 + 5b^2 = |a| \iff a^2 = |a| \iff |a| = 1 \implies |\alpha|^2 = 1$

($\Leftarrow$) Нека фиксираме произволно $\alpha = (a + \sqrt{5}b\,i) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, за което $|\alpha|^2 = 1$.

$|\alpha|^2 = 1 \quad |\alpha| = \sqrt{1} = 1 \quad |a + \sqrt{5}bi| = 1 \quad |a| + \sqrt{5}|b|i = 1 + 0i \implies |a| = 1, a = \pm 1$ и $b = 0$

1 сл.) $\alpha = 1$, тогава за $\alpha' = 1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, имаме че $\alpha\alpha' = 1.1 = 1 = 1.1 = \alpha'\alpha$, следователно α е обратим.

2 сл.) $\alpha = -1$, тогава за $\alpha' = -1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, имаме че $\alpha\alpha' = -1.-1 = 1 = -1.-1 = \alpha'\alpha$, следователно α е обратим.

Решение (iv)

В (iii) показахме, че за произволно $\alpha = (a + \sqrt{5}b\,i) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^*$, $b = 0 \Rightarrow \alpha = a$, $|a| = 1 \implies a = \pm 1$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^* = \{\pm 1\}$